

Romuald Mosdorf
Joanicjusz Nazarko
Nina Siemieniuk

SYMULACJA WYBRANYCH PROCESÓW EKONOMICZNYCH Z ZASTOSOWANIEM TEORII CHAOSU DETERMINISTYCZNEGO

Gospodarka rynkowa oparta jest na mechanizmach i instytucjach zapewniających swobodny przepływ kapitału. Warunkiem jej rozwoju jest sprawnie funkcjonujący system bankowy. W nowoczesnej gospodarce charakteryzującej się podziałem pracy wymiana produktów między podmiotami dokonuje się za pośrednictwem pieniądza. Dla sprawnego zaopatrywania podmiotów w środki płatnicze oraz właściwego funkcjonowania obiegu pieniężnego potrzebni są pośrednicy finansowi. Pośrednicy finansowi to generalnie takie instytucje, których głównym celem jest równoważenie popytu na lokaty finansowe jednych podmiotów ze zgłaszanymi przez inne podmioty potrzebami wykorzystania środków pieniężnych. Dokonywane jest to poprzez przyjmowanie środków finansowych od podmiotów mających ich nadwyżki i stawianie następnie tych środków w formie kredytu do dyspozycji podmiotom charakteryzującym się czasowymi deficytami środków. Można tu mówić o tak zwanej transakcyjnej funkcji banków. Oprócz tego banki pełnią funkcję transformacyjną, która sprowadza się do transformacji wielkości środków, transformacji terminów, transformacji ryzyka oraz transformacji przestrzennej alokacji środków, jak również transformacji informacji [1]. Z makroekonomicznego punktu widzenia banki pełnią rolę pośredników finansowych

stawiając do dyspozycji usługi związane z przyjmowaniem lub udostępnianiem kapitału i kojarząc w ten sposób podaż kapitału i popyt na inwestycje kapitałowe.

W referacie rozpatrywany jest cały system bankowy. Opracowano prosty model symulacji zarządzania kapitałem całkowitym banków z zastosowaniem teorii chaosu deterministycznego [4], [5]. Pokazano, że na pozór proste reguły funkcjonowania systemu bankowego mogą prowadzić do bardzo skomplikowanych zachowań rynku bankowego.

Racjonalne funkcjonowanie banku determinowane jest taką wielkością kapitału, który równoważy udzielane kredyty. Realizowane jest to przez określone zasady sterowania systemem bankowym.

W gospodarce znajdującej się w okresie transformacji zasady wolnego rynku współistnieją z pozostałymi z wcześniejszego okresu zasadami centralnego sterowania gospodarką. W przypadku, gdy wprowadzone zasady wolnego rynku są niestabilne, decydenci sięgają do zasad centralnego sterowania (w pracy nazywane celowym sterowaniem). Daje się to zaobserwować w niektórych krajach postkomunistycznych.

Poniżej pokazano dwa proste modele opisujące zmiany kapitału całkowitego banku w przypadku gospodarki wolnorynkowej oraz celowego sterowania wielkością kapitału banku.

Modele oparto na równaniach liniowych, dlatego powinny być one traktowane jako modele jakościowe. Możliwe jest rozszerzenie modeli na przypadek nieliniowy, powinno to być jednak poprzedzone analizą rzeczywistych zachowań kapitału banku, obserwowanych w gospodarce znajdującej się w okresie transformacji.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

c_x - wielkość kapitału zgromadzonego w bankach obliczana na początku roku,

C_{min} - wielkość minimalna kapitału zgromadzonego w bankach.

Przyjęto, że decydent zezwala na wprowadzenie zasad wolnego rynku, gdy wielkość kapitału zgromadzonego w bankach c_x jest większa od wielkości minimalnej C_{min} .

W przypadku gdy c_x jest mniejsze od C_{min} decydent rezygnuje z zasad wolnego rynku, podejmując działania celowe prowadzące do zarządzania wielkością kapitału c_x .

Zasada wolnego rynku stosowana przez decydenta gdy $c_x > C_{min}$

Oprocentowanie lokat i kredytów kształtowane jest przez decydenta w taki sposób, że wielkość lokat napływających do systemu bankowego w danym roku (n) określona jest zależnością:

$$J_L^n = L(c_o - c_x^n) \quad (1)$$

gdzie:

L - współczynnik określający dynamikę rynku w zakresie lokowania kapitału w banku przez podmioty,

c_x - wielkość kapitału zgromadzonego w bankach obliczana na początku roku,

c_o - potencjalny kapitał, jaki może wpłynąć do banku w postaci lokat, określany na początku roku.

Natomiast wielkość udzielanych kredytów w danym roku (n) określona jest następująco:

$$J_k^n = K(c_x^n - c_k) \quad (2)$$

gdzie:

K - współczynnik określający dynamikę rynku w zakresie udzielania kredytów podmiotom,

c_k - wielkość udzielonych kredytów obliczana na końcu roku.

Decydent oczekuje, że wielkość udzielonych kredytów w danym roku zostanie pokryta przez lokaty, jakie napłyną do banków w roku następnym.

Zasada wolnego rynku ma postać:

$$K(c_x^n - c_k) = L(c_o - c_x^{n+1}) \quad (3)$$

$$c_x^{n+1} = B - \frac{K}{L} c_x^n \quad (4)$$

gdzie: $B = c_o - \frac{K}{L} c_k$

Rynek jest stabilny dla $K/L < 1$ (możliwe jest osiągnięcie stanu równowagi dla zadanych c_0 i C_k).

Zasada celowego sterowania stosowana przez decydenta w przypadku gdy $c_x \leq c_{\min}$

Decydent określa zasady ustalania oprocentowania lokat i kredytu w taki sposób, który pozwala na wzrost lokat w bankach. Bilansowanie lokat i kredytów odbywa się w danym roku n . Równanie bilansu

$$L(c_0 - c_x^n) - K(c_x^n - c_k) = c_x^{n+1} - c_x^n \quad (5)$$

gdzie:

$(c_x^{n+1} - c_x^n)$ - oznacza przyrost kapitału całkowitego w systemie bankowym w roku n .

Po przekształceniach otrzymamy równanie określające zmiany kapitału całkowitego w bankach:

$$c_x^{n+1} = Dc_x^n + E \quad (6)$$

ma postać:

gdzie:

$D = 1 - L - K$ i $E = Lc_0 + Kc_k$ - wielkości stałe charakteryzujące rynek kapitałowy oraz zasady określone przez decydenta.

Równanie (5) jest zbieżne dla $|D| < 1$. W pracy rozpatrywano przypadek $|D| < 1$.

Zmiany kapitału całkowitego w bankach opisane są układem równań:

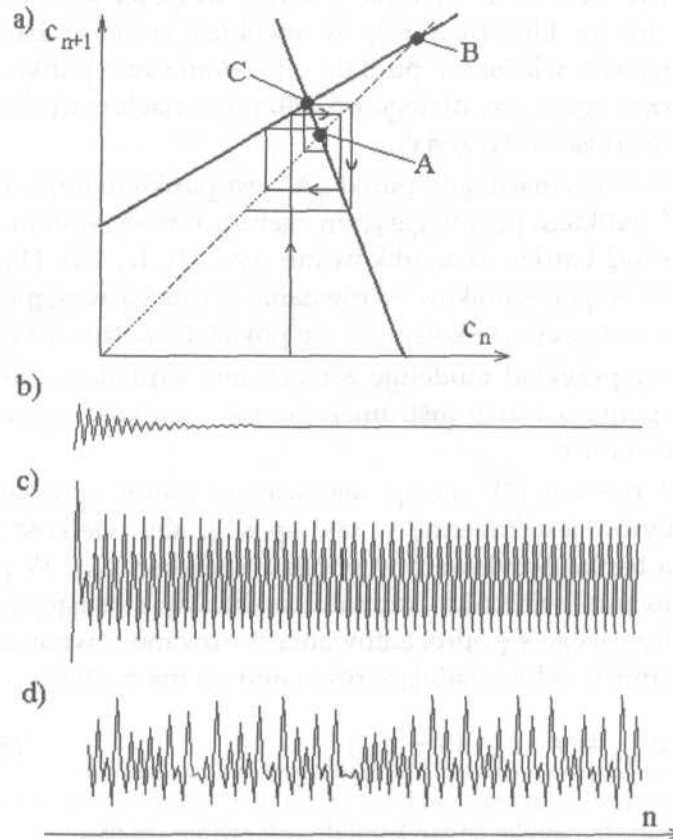
$$\begin{aligned} c_x^{n+1} &= B - \frac{K}{L} c_x^n \quad \text{dla } c_x > c_{\min} \\ c_x^{n+1} &= Dc_x^n + E \quad \text{dla } c_x \leq c_{\min} \end{aligned} \quad (7)$$

Na rys. 1 pokazano przebieg iteracji oraz przykładowe rozwiązania układu równań (7).

Rysunek 1

Iteracje równania (7)

- a) Przebieg iteracji równania (7) na wykresie $c_{n+1}(c_n)$
- b) Iteracje prowadzące do jednego punktu zbieżności dla $c_{n+1} = 0.6c_n + 8$ i $c_{n+1} = 50 - 2.6c_n$
- c) Iteracje prowadzące do dwóch punktów zbieżności dla $c_{n+1} = 0.6c_n + 8$ i $\theta_{n+1} = 20 - 1.6c_n$
- d) Iteracje chaotyczne dla $c_{n+1} = 0.6c_n + 8$ i $c_{n+1} = 20 - 0.9c_n$



Dla wielkości c_n większych od wartości krytycznej c_{min} występują dwa punkty stałe. Na rys. 1a oznaczono je literami „A” i „B”. Punkt „A” charakteryzuje wielkości c_n właściwe dla wolnego rynku. Punkt „B” charakteryzuje wielkości c_n charakterystyczne dla przypadku celowego sterowania. Punkt „B” jest zawsze punktem „przyciągającym”

wartości c_n w kolejnych iteracjach. Gdy w czasie tego procesu wartość c_n przekroczy krytyczną wartość C_{min} (punkt C na rys. 1a), wówczas kluczową rolę w procesie ewolucji systemu bankowego będą odgrywały własności punktu stałego oznaczonego literą „A”. Gdy punkt ten będzie w kolejnych iteracjach przyciągał wartości c_n wówczas system bankowy osiągnie stan stacjonarny charakterystyczny dla punktu „A” (rys. 1b). Natomiast w przypadku gdy punkt „A” będzie w kolejnych iteracjach odpychał wartości c_n wówczas po pewnej liczbie iteracji wartość c_n spadnie poniżej wartości krytycznej C_{min} , spowoduje to, że kluczową rolę w ewolucji systemu bankowego zaczną odgrywać własności punktu „B”. Ponieważ punkt „B” jest punktem przyciągającym, dlatego po kilku iteracjach wartość c_n znów przekroczy wartość krytyczną C_{min} .

W opisanej sytuacji, gdy punkt „A” jest punktem odpychającym, a punkt „B” punktem przyciągającym zachowanie się systemu bankowego może być bardzo skomplikowane (rys. 1b, 1c, 1d). Dla niektórych wartości współczynników w równaniu (7) mogą wystąpić chaotyczne zmiany wartości c_n w kolejnych, co pokazano na rys. 1d ([4], [5]).

Opisany przykład modeluje zarządzanie kapitałem całkowitym banków za pomocą takich instrumentów jak wysokość oprocentowania kredytów i lokat.

Układ równań (7) opisuje sytuację, w której oprocentowanie lokat i kredytów jest zmienne w taki sposób, aby wielkość kapitału całkowitego banku oscylowała w pobliżu wielkości C_{min} . W pracy [2] do modelowania wielkości kapitału w banku stosującym zasadę samoograniczającego się oprocentowania stosowano równanie logistyczne. Równanie to odpowiadające równaniu (7) ma postać:

$$c_{n+1} = r - c_n (1 - c_n) \quad (8)$$

gdzie:

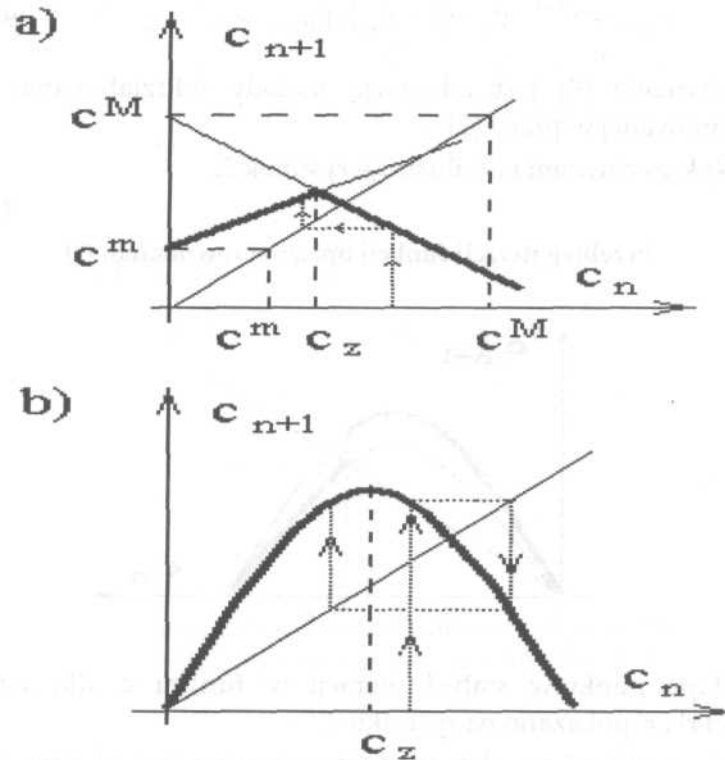
r - opisuje dynamikę zmian kapitału całkowitego banku.

Scenariusz pojawienia się chaosu w równaniu (7) jest taki sam jak w równaniu logistycznym (8), które może być traktowane jako opisujące zachowanie się kapitału całkowitego banku w przypadku, gdy zarząd banku modyfikuje stopy procentowe kredytu i lokat w taki sposób, aby wielkość kapitału całkowitego oscylowała w pobliżu C_{min} . Na rysunku 2 pokazano przykładowy przebieg kolejnych iteracji równania (7) i równania logistycznego (8).

Przykładowy przebieg iteracji:

(a) równania (7);

(b) równania logistycznego (8)



gdzie:

c_n - wielkość całkowitego kapitału banku w przyszłości,

c^M, c^m - maksymalna i minimalna wielkość kapitału całkowitego banku,

c_z - oczekiwana (zakładana) wielkość kapitału całkowitego banku.

W pracy [2] analizowano przypadek, gdy zarząd banku posługuje się dwoma strategiami. Jedną agresywną, charakteryzującą się współczynnikiem r^1 i drugą mniej agresywną, charakteryzującą się współczynnikiem r^2 . Przyjęto, że zarząd banku wybiera strategię bardziej agresywną, gdy c_n spadnie poniżej wielkości c_z . Zaś, gdy wielkość c_n wzrośnie powyżej c_z , wówczas zarząd banku przyjmuje mniej

agresywną strategię sterowania kapitałem całkowitym banku. W analizowanym przypadku $r^1 > r^2$. Równanie opisujące zachowanie kapitału całkowitego banku ma postać:

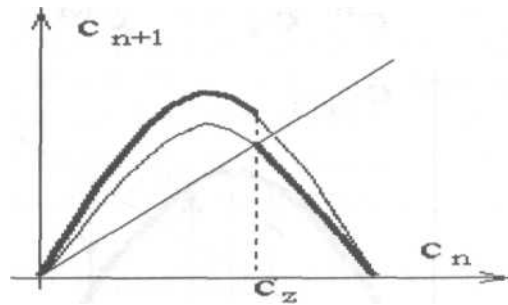
$$\begin{aligned} c_{n+1} &= r^{(1)} \cdot c_n \cdot (1 - c_n) \text{ dla } c_n < c_z, \\ c_{n+1} &= r^{(2)} \cdot c_n \cdot (1 - c_n) \text{ dla } c_n \geq c_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Równanie (9) jest adaptacją metody oddziaływania fraktali zaproponowanej w pracy [2].

Wykres równania (9) ilustruje rysunek 3.

Rysunek 3

Przebieg iteracji funkcji opisanej równaniem (9)



Mapę punktów stałych iteracji w funkcji c_z dla ustalonych wartości r^1 i r^2 pokazano na rysunku 4.

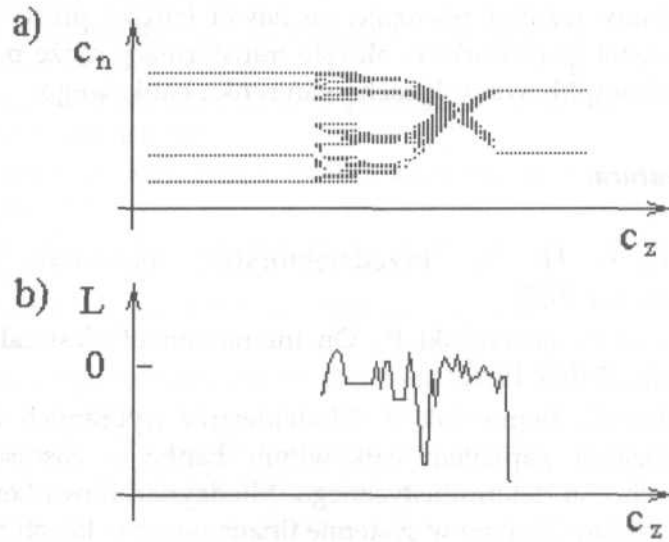
Na rysunku 4 przedstawiono iterację równania logistycznego (9). Mapa punktów stałych iteracji odwzorowania dla danych r^1 i r^2 pokazana została na rysunku 4a. Na rysunku 4b pokazano zmiany współczynnika Lapunowa w procesie mieszania się dwóch schematów iteracji. Wyniki obliczeń pokazują, że dwa periodyczne schematy iteracji (charakteryzujące różne strategie) tworzą iterację chaotyczną.

Własności obszaru przejściowego widoczne są na graficznej mapie prawdopodobieństwa występowania poszczególnych schematów iteracji w funkcji wartości początkowej wkładu oszczędności C_0 (rysunek 5). Skala pod rysunkiem pozwala określić wartość prawdopodobieństwa występowania układu, który realizuje się dla $c_n > c_z$. Jest to prawdopodobieństwo wykorzystania przez zarząd banku drugiej, mniej agresywnej strategii zarządzania kapitałem całkowitym banku.

Rysunek 4

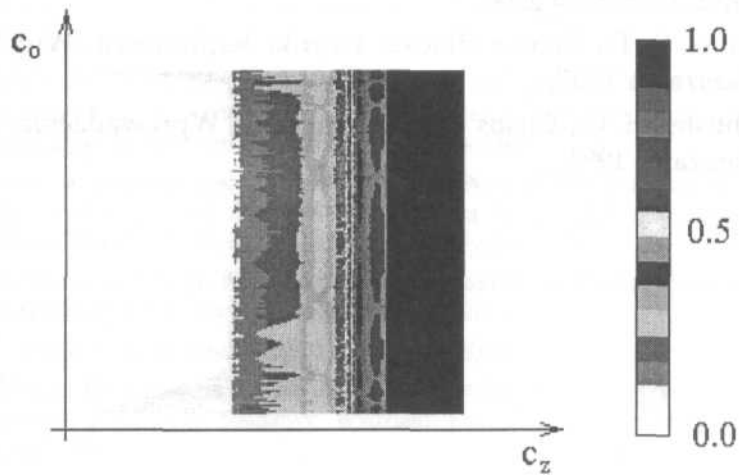
Iteracja równania logistycznego (9)

- (a) mapa punktów stałych dla $r^1 = 3.5$ i $r^2 = 3.2$;
- (b) zmiany współczynnika Lapunowa L w obszarze przenikania się iteracji



Rysunek 5

Mapa prawdopodobieństwa występowania drugiego odwzorowania w równaniu (9)



Zaproponowany model symuluje zmiany kapitału całkowitego banków występujące w gospodarce znajdującej się w okresie transformacji.

Omówione w pracy zależności opisujące zachowanie się rynku bankowego oraz decydentów są bardzo proste, dlatego model ten należy traktować jako model jakościowy.

Uzyskany rezultat pokazuje, że nawet bardzo prosty schemat funkcjonowania gospodarki w okresie transformacji może prowadzić do bardzo skomplikowanych zachowań rynku bankowego.

Literatura:

1. Buschgen H. E., Przedsiębiorstwo bankowe. Poltext, Warszawa 1997.
2. Janeczko S., Jastrzębski P., On interaction of classical fractals. Preprint IMPW 1996.
3. Mosdorf R., Siemieniuk N., Modelowanie wybranych aspektów zarządzania kapitałem całkowitym banku z zastosowaniem teorii chaosu deterministycznego. Międzynarodowa konferencja naukowa nt. Zmiany w systemie finansowym w latach dziewięćdziesiątych na przykładzie wybranych krajów Europy, Wyższa Szkoła Finansów i Zarządzania, Wydział Finansów i Informatyki, Białystok 20-21 maja 1999.
4. Mosdorf R., Nazarko, Siemieniuk N., Chaotическое поведение в простой модели управления общим банковским капиталом. Санкт Петербург 2000.
5. Peters E. E., Teoria chaosu a rynki kapitałowe. Wig Press, Warszawa 1997.
6. Schuster H. G., Chaos deterministyczny. Wprowadzenie. PWN, Warszawa 1993.